

Chapitre 13

Suites réelles et complexes

Plan du chapitre

1	Généralités sur les suites	1
1.1	Introduction	1
1.2	Opérations sur les suites	2
1.3	Majorations, minoration	2
1.4	Sens de variation	3
2	Limite d'une suite	4
2.1	Limite finie – suite convergente	4
2.2	Limite infinie	8
2.3	Opérations sur les limites	9
2.4	Limites et inégalités	11
3	Sens de variation et limites	12
3.1	Suites monotones	12
3.2	Suites adjacentes	13
4	Extraction de suites	14
4.1	Suites extraites	14
4.2	Le théorème de Bolzano-Weierstrass	17
5	Suites complexes	20
5.1	Généralités	20
5.2	Limite d'une suite complexe	21
5.3	Suites extraites (cas complexe)	21
6	Suites particulières	22
6.1	Suites récurrente linéaire d'ordre 1	22
6.2	Suites récurrente linéaire d'ordre 2	23
6.3	Suites récurrentes d'ordre 1, cas général	25
7	Méthodes pour les exercices	28

1 Généralités sur les suites

1.1 Introduction

Définition 13.1

On appelle suite réelle toute application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Elle est généralement notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (u_n) .

Le réel u_n est appelée le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque. On peut aussi définir des suites $u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, ou plus généralement des suites $u : \llbracket n_0, +\infty \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On notera alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ une telle suite.

On peut définir une suite réelle de plusieurs façons :

- *Explicite* : $(n^2 - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ ou “Soit la suite de terme général $u_n = \ln n$ ” (définie pour $n \geq 1$)
- *Par récurrence* :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
- *Implicite* : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le réel x_n comme étant l'unique solution de l'équation $\ln x + x = n$. On définit ainsi une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque (Suites bien définies). Pour qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bien définie, il faut s'assurer que pour chaque valeur de n , l'expression de u_n a un sens et est unique. Voici des suites **mal définies** :

$$(\ln n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \begin{cases} u_0 = \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ u_{n+1} = \tan(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad x_n \text{ est l'unique solution de } x^2 = 1 - n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1.2 Opérations sur les suites

Définition 13.2

Étant donné deux suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un réel λ , on définit

- Les suites $u + v$, $u - v$, uv et λu de termes généraux respectifs $u_n + v_n$, $u_n - v_n$, $u_n v_n$ et λu_n .
- Si la suite (v_n) ne s'annule pas, les suites $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ de termes généraux $\frac{1}{v_n}$ et $\frac{u_n}{v_n}$.
- Enfin, on dit que $u \leq v$ si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$

1.3 Majorations, minorations

Définition 13.3

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une propriété $\mathfrak{P}$ à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n \geq N}$ vérifie la propriété $\mathfrak{P}$.

Définition 13.4

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite...

1. majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$
2. minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$
3. bornée si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à la fois majorée et minorée.
4. positive si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$
5. négative si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 0$
6. constante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n$ ou encore $\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = C$
7. stationnaire si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang, c-à-d si

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n = C$$

Exemple 1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$ est stationnaire mais pas constante.

Exemple 2. La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée mais pas stationnaire.

Théorème 13.5

Pour toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} &\iff (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est majorée} \\ &\iff \dots\dots\dots\end{aligned}$$

Remarque. On peut remplacer le “ $\exists K \in \mathbb{R}$ ” par “ $\exists K \geq 0$ ” ou même “ $\exists K \geq 100$ ” : si la proposition est vraie pour une valeur K_0 , alors elle l’est aussi pour la valeur $K_0 + 100$.

1.4 Sens de variation

Définition 13.6 – Sens de variation

Une suite réelle u est dite...

1. croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$
2. décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$
3. monotone si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante.
4. strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$
5. strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$
6. strictement monotone si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante ou strictement décroissante.

Il arrive que ces propriétés ne soient vérifiées qu’à partir d’un certain rang. Toute suite croissante et décroissante est une suite constante et vice versa.

Méthode – Étudier la monotonie

Pour montrer qu’une suite réelle u est croissante, on peut :

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$
- Si (u_n) est **strictement positive**, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$
- Si $u_n = f(n)$ avec $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, il y a aussi des variantes “décroissantes” et/ou “strictes” : si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante, etc.

Exemple 3. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exemple 4. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$.

Exemple 5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \arctan(\ln n)$ est croissante, puisque la fonction $f : x \mapsto \arctan(\ln x)$ est croissante sur $[1, +\infty[$ (en tant que composée de fonctions croissantes).

Quelques résultats évidents :

- Par récurrence immédiate, si (u_n) est croissante, alors pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$, on a $u_p \leq u_q$.
- Si u est une suite croissante, alors $-u$ est décroissante.
- Si u et v sont des suites croissantes, alors $u + v$ aussi.
- Si u et v sont des suites croissantes *positives*, alors uv aussi.

2 Limite d'une suite

2.1 Limite finie – suite convergente

On s'intéresse à la notion précise de limite pour une suite, dont on donne d'abord une interprétation. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et u une suite réelle. Dire que la suite (u_n) tend vers ℓ revient à vérifier l'assertion suivante :

(*) “ Pour tout $\varepsilon > 0$, le réel u_n appartient à $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ pour n assez grand ”

Exemple 6. On sait que la suite de terme général $u_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$ tend vers 0. Vérifions donc l'assertion ci-dessus avec $\ell = 0$.

- Avec $\varepsilon = 1$, on a $u_n \in [-1, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on a $u_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dès que $n \geq 2$.
- Avec $\varepsilon = \frac{1}{3}$, on a $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ dès que $n \geq 3$.
- Plus généralement, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $u_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ dès que $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, puisqu'alors $|u_n| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

L'assertion (*) signifie bien que le réel u_n finit par se rapprocher de plus en plus de ℓ lorsque n grandit, sans pour autant atteindre ℓ a priori.

La définition de la limite se base sur l'assertion (*) avec deux transformations : d'une part, puisque la valeur $|u_n - \ell|$ représente la distance qui sépare u_n de ℓ , on peut écrire :

$$u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \iff |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

D'autre part, dire que " $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour n assez grand" revient à dire qu'il existe un rang N à partir duquel l'assertion $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ est vraie, donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Nous obtenons finalement la définition suivante :

Définition 13.7

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Étant donné $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ ou converge vers ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Un tel réel ℓ est alors appelé limite de la suite u .

2. On dit que (u_n) est convergente lorsque : $\exists \ell \in \mathbb{R} \quad u_n \rightarrow \ell$
3. On dit que (u_n) est divergente lorsque (u_n) n'est pas convergente.

Si (u_n) tend vers ℓ , on peut noter :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim u_n = \ell \quad u_n \rightarrow \ell$$



Pour que la suite (u_n) soit **convergente**, il faut qu'elle admette une **limite finie**.

Méthode – Montrer une limite finie en partant de la définition

Une fois ε fixé, pour trouver un entier N qui convient, on part de l'équation $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$:

1. On trouve (par exemple en résolvant l'équation) une condition du type " $n \geq \text{qqch}(\varepsilon)$ " qui assure que l'équation soit vérifiée.
2. Il suffit alors de poser N égal à n'importe quel entier $\geq \text{qqch}(\varepsilon)$ et le tour est joué !

Exemple 7. Montrer que $e^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ en utilisant la définition de la limite.



Utiliser la définition de la limite pour justifier une limite est la méthode la plus lourde ! Elle peut être utile mais n'est à utiliser qu'en dernier recours.

Théorème 13.8 – Unicité de la limite (finie)

Soit $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \rightarrow \ell_1$ et $u_n \rightarrow \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$.
Autrement dit, la limite de la suite (u_n) est unique.

Démonstration.

□

Théorème 13.9

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$u_n \rightarrow \ell \iff u_n - \ell \rightarrow 0 \iff |u_n - \ell| \rightarrow 0$$

Méthode – Montrer que $u_n \rightarrow \ell$ par majoration de $|u_n - \ell|$

Si la valeur de la limite ℓ est donnée à l'avance ou qu'on l'a devinée, pour montrer que $u_n \rightarrow \ell$, on peut majorer $|u_n - \ell|$ par une expression v_n qui tend vers 0.

Autrement dit : $\begin{cases} |u_n - \ell| \leq v_n \\ v_n \rightarrow 0 \end{cases} \implies u_n \rightarrow \ell$

Exemple 8. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$ converge vers 1.

Théorème 13.10

Pour tous $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, si $u_n \rightarrow \ell$, alors $|u_n| \rightarrow |\ell|$.

Démonstration. Comme $u_n \rightarrow \ell$, on a $|u_n - \ell| \rightarrow 0$. De plus, par la seconde inégalité triangulaire :

$$\left| |u_n| - |\ell| \right| \leq |u_n - \ell| \rightarrow 0$$

donc $|u_n| \rightarrow |\ell|$. □

Théorème 13.11

Toute suite convergente est bornée.

2.2 Limite infinie

Définition 13.12 – Limites infinies

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque, pour tout réel A , on a $u_n \leq A$ à partir d'un certain rang :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n \leq A$$

2. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel B , on a $u_n \geq B$ à partir d'un certain rang :

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n \geq B$$

Si (u_n) tend vers $+\infty$, on peut noter : $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \rightarrow +\infty$ en précisant éventuellement " $n \rightarrow +\infty$ " s'il y a un risque de confusion.

Pour montrer qu'une suite (u_n) admet une limite infinie en utilisant la définition, le procédé est similaire à celui d'une limite finie. La méthode ci-dessous prend le cas d'une limite $-\infty$ mais s'adapte à celui d'une limite $+\infty$.

Méthode – Montrer une limite infinie en partant de la définition

Une fois A fixé, pour trouver un entier N qui convient, on part de l'équation $u_n \leq A$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$ et on cherche une condition du type " $n \geq \text{qqch}(A)$ " qui assure que l'équation soit vérifiée.

Exemple 9. Montrer que la suite de terme général $u_n = \ln n + (-1)^n$ tend vers $+\infty$ en utilisant la définition.

Remarque (Nature d'une suite). Quand on demande la nature d'une suite, on entend par là prouver si elle est convergente ou divergente. Trois cas sont possibles :

- La suite (u_n) tend vers une limite finie, c'est-à-dire est *convergente*.
- Sinon, la suite (u_n) est *divergente* :
 - Ou bien (u_n) tend vers une limite infinie.
 - Ou bien (u_n) n'a pas de limite, par exemple $u_n = (-1)^n$ ou $u_n = (-2)^n$.

Exemple 10 (Essentiel). Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la suite (q^n) .

Théorème 13.13 – Unicité de la limite (finie ou non)

Si une suite admet une limite (finie ou infinie), cette limite est unique.

2.3 Opérations sur les limites

Rappel : les formes indéterminées (FI) avec les limites sont :

$$(+\infty) + (-\infty) \quad 0 \times (\pm\infty) \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

À cause de la FI $0 \times (\pm\infty)$, il existe d'autres FI liées aux puissances et par la formule $a^b = e^{b \ln a}$:

$$0^0 \quad 1^\infty \quad \infty^0$$

Par exemple, pour la FI 0^0 : $\begin{cases} a_n \rightarrow 0 \\ b_n \rightarrow 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ln a_n \rightarrow -\infty \\ b_n \rightarrow 0 \end{cases}$, de sorte que la limite de $b_n \ln a_n$ donne une FI. et donc $e^{b_n \ln a_n}$ aussi, de sorte que $a_n^{b_n}$ donne une FI. En conséquence, 0^0 conduit à une FI.

Limite d'une somme et d'un produit

Théorème 13.14 – Limite de la somme et du produit

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad v_n \rightarrow \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors, à condition que cela ne donne pas une forme indéterminée,

$$u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell' \quad u_n v_n \rightarrow \ell \ell' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda u_n \rightarrow \lambda \ell$$

Exemple 11. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{n - 3n^2}{n\sqrt{n} + 1}$.

Théorème 13.15

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \rightarrow 0$ et (v_n) est bornée, alors $u_n v_n \rightarrow 0$.

Démonstration.

□

Limite d'un inverse et d'un quotient

On peut montrer que si

$$v_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$$

alors v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang N . Ainsi, la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \geq N}$ est bien définie.

Théorème 13.16 – Limite de $\frac{1}{u_n}$

Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $v_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{v_n} \rightarrow \frac{1}{\ell}$.
2. Si $v_n \rightarrow \pm\infty$, alors $\frac{1}{v_n} \rightarrow 0^{\pm}$.
3. Si $v_n \rightarrow 0$ et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{v_n} \rightarrow +\infty$ (car $v_n \rightarrow 0^+$).
4. Si $v_n \rightarrow 0$ et $v_n < 0$ à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{v_n} \rightarrow -\infty$ (car $v_n \rightarrow 0^-$).
5. Si $v_n \rightarrow 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, mais que les cas 3 et 4 ne sont pas vérifiés, alors $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ n'a pas de limite.

Exemple 12. La suite de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ vérifie $v_n \rightarrow 0$ mais $\frac{1}{v_n} = n(-1)^n$ n'a pas de limite.

Remarque (Limite d'un quotient). Si $u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v_n \rightarrow \ell' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, alors à condition qu'on n'ait pas de forme indéterminée,

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{\ell'}$$

On a des résultats similaires si $v_n \rightarrow 0^+$ ou $v_n \rightarrow 0^-$, mais si on est en dehors de ces deux cas, on doit être très prudent, comme le montre l'Exemple 12 (si on prend $u_n = 1$). Pour être sûr de ne pas se tromper, on peut aussi réécrire $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$ et appliquer les Théorèmes 13.14 et 13.16.

Exemple 13. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{n^3 + 2n + 2}{3n^3 - n^2 + 1}$.

Limite d'une composition par une fonction

Théorème 13.17 – Limite de $f(u_n)$

Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et u une suite à valeurs dans I .

$$\begin{cases} u_n \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \implies f(u_n) \rightarrow b$$

En particulier, si $a \in I$ et f est continue en a , alors $b = f(a)$ et donc $f(u_n) \rightarrow f(a)$.

Exemple 14. Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $e^{u_n} \rightarrow e^\ell$.

Si $u_n \rightarrow 0$, alors $\ln(1 + u_n) \rightarrow 0$.

2.4 Limites et inégalités

Théorème 13.18 – Passage à la limite

Soit u et v deux suites **convergentes** vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\lim u_n > \lim v_n$. Alors $\lim(u_n - v_n) > 0$. Cela entraîne que $u_n - v_n > 0$ à partir d'un certain rang, ce qui contredit l'hypothèse $u_n \leq v_n$. Donc $\lim u_n \leq \lim v_n$. $\square$



Une inégalité stricte $u_n < v_n$ devient une inégalité large en passant à la limite : $\lim u_n \leq \lim v_n$. Penser à $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$.



Pour passer à la limite dans $u_n \leq v_n$, il faut que $\lim u_n$ **et** $\lim v_n$ aient un sens !

Théorème 13.19 – Théorème d'encadrement

Soit u, w deux suites convergeant vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit v une suite telle que

$$u_n \leq v_n \leq w_n \quad \text{à partir d'un certain rang}$$

alors (v_n) est convergente et $v_n \rightarrow \ell$.

Démonstration.

□

Le principal intérêt de ce théorème est de montrer que (v_n) est convergente ! En effet, si on sait déjà que (v_n) est convergente, le Théorème 13.18 suffit pour conclure que $v_n \rightarrow \ell$.

Théorème 13.20 – Encadrement d'un seul côté

Soit u et v deux suites vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
- Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Ce résultat est lui aussi un théorème d'existence de limite. Attention au sens : si $u_n \leq v_n$ et que $\lim u_n = -\infty$, on ne peut rien dire sur (v_n) : a priori, on ne sait même pas si sa limite existe.

3 Sens de variation et limites

3.1 Suites monotones

Théorème 13.21 – Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite croissante.

- Si (u_n) est majorée, elle est convergente et $\lim u_n = \sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) est non majorée, elle est divergente et $\lim u_n = +\infty$.

Soit (u_n) une suite décroissante.

- Si (u_n) est minorée, elle est convergente et $\lim u_n = \inf \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) est non minorée, elle est divergente et $\lim u_n = -\infty$.

Autrement dit, toute suite monotone admet une limite (éventuellement infinie).

Exemple 15. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est majorée. En déduire sa nature.

Remarque. Si (u_n) est une suite croissante qui tend vers ℓ , alors pour tout n on a $u_n \leq \ell$.

3.2 Suites adjacentes

Définition 13.22 – Suites adjacentes

Deux suites sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si leur différence tend vers 0.

Théorème 13.23 – Théorème des suites adjacentes

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

Démonstration.

□

Remarque. En reprenant les notations de la preuve, si $\ell = \lim u_n = \lim v_n$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \ell \leq v_n$$

et même

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad u_p \leq \ell \leq v_q$$

Exemple 16. Étudier la nature des suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

4 Extraction de suites

4.1 Suites extraites

On considère (par exemple) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$, dont les premiers termes sont reproduits dans le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5	6	...
u_n	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	...

On remarque que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite... Cependant, si on ne gardait que les termes dont l'indice n est pair, on obtiendrait une suite qui tend vers 1, tandis que si on ne gardait que les termes d'indices impairs, on obtiendrait une suite qui tend vers -1 . Pour formaliser cela, on a besoin d'une nouvelle notion.

Définition 13.24 – Suite extraite – définition “intuitive”

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle suite extraite de (u_n) toute suite obtenue en ne conservant qu'une partie des termes de la suite (u_n) , sans en changer l'ordre.

En reprenant la suite $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ ci-dessus, on peut définir la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $v_k = u_{2k}$. Ceci permet de ne conserver que les indices pairs :

n	0	1	2	3	4	5	6	...
u_n	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	...

k	0		1		2		3	...
$v_k = u_{2k}$	0		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{6}{7}$	...

À présent, on constate que v_k converge effectivement vers 1. De même, la suite $(u_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ convergera vers -1 .



Quand on extrait une sous-suite, cela conduit (sauf cas trivial) à un décalage au niveau des indices : v_3 ne correspond pas au terme d'indice 3 de (u_n) , mais à celui d'indice 6.

Dans le cas général, nous avons besoin d'une notion supplémentaire : celle d'extractrice.

Définition 13.25 – Extractrice

On appelle extractrice toute application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Théorème 13.26

Soit φ une extractrice. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(k) \geq k$.
De plus, si ψ est une seconde extractrice, alors $\varphi \circ \psi$ est aussi une extractrice.

Exemple 17. Les applications suivantes sont typiquement des extractrices :

$$k \mapsto k+1 \quad k \mapsto 2k \quad k \mapsto 2k+1$$

Définition 13.27 – Suite extraite – définition rigoureuse

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est appelée suite extraite de (u_n) ou sous-suite de (u_n) s'il existe une extractrice φ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad v_k = u_{\varphi(k)}$$

Autrement dit, $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} = (u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

La valeur de $\varphi(0)$ correspond donc à l'indice du premier terme de (u_n) qu'on garde. $\varphi(1)$ est l'indice du deuxième terme, $\varphi(2)$ est l'indice du troisième, etc.



En pratique, pour définir la suite extraite v , on fait tout avec la même lettre que la suite u (typiquement n). On dit par exemple que $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque. En pratique, pour calculer $u_{\varphi(n)}$, il suffit de prendre l'expression de u_n et de remplacer n par $\varphi(n)$.

Exemple 18. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{n}{n+1}$.

- Le terme général de (u_{2n}) est
- Le terme général de (u_{4n+1}) est
- Le terme général de (u_{4n+3}) est

Définition 13.28 – Valeur d'adhérence

On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence d'une suite (u_n) s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $u_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$.

Attention, pour que ℓ soit une valeur d'adhérence, il faut que ℓ soit fini.

Exemple 19. En reprenant l'Exemple 18, on constate que les trois sous-suites concernées tendent vers les limites 0, 1 et -1 : ce sont des valeurs d'adhérence de (u_n) .

Théorème 13.29

Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tend vers ℓ .

Corollaire 13.30

Soit (u_n) une suite réelle. S'il existe deux suites extraites de (u_n) qui admettent des limites différentes (dans $\mathbb{R}$), alors (u_n) n'admet pas de limite.

En particulier, si une suite admet au moins deux valeurs d'adhérence, cette suite n'admet pas de limite.

Démonstration. Supposons par l'absurde que (u_n) admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors toute suite extraite convergeait vers cette même limite, ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

Méthode

Pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite, on peut notamment montrer qu'on peut en extraire deux sous-suites qui tendent vers des limites distinctes.

Exemple 20. Montrer que la suite de terme général $u_n = e^{\frac{1}{n}} \left[\frac{(-1)^n}{n} \right]$ n'admet pas de limite.

Théorème 13.31

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_{2n} \rightarrow \ell$ et $u_{2n+1} \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

Démonstration. Montrons que $u_n \rightarrow \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Or,

- $u_{2n} \rightarrow \ell$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N_1 \quad |u_{2k} - \ell| \leq \varepsilon$
- $u_{2n+1} \rightarrow \ell$, donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N_2 \quad |u_{2k+1} - \ell| \leq \varepsilon$

On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $n \geq N$. Montrons que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

- Si n est pair, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Comme $n = 2k \geq 2N_1$, on a $k \geq N_1$, donc $|u_{2k} - \ell| = |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
- Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Comme $n = 2k + 1 \geq 2N_2 + 1$, on a $k \geq N_2$, donc $|u_{2k+1} - \ell| = |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

□

4.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass**Définition 13.32**

On appelle segment de $\mathbb{R}$ tout intervalle fermé borné, càd tout intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$.

Théorème 13.33 – Théorème des segments emboîtés

Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite de segments tels que $I_{n+1} \subset I_n$. On suppose que la largeur $(b_n - a_n)$ de I_n vérifie $(b_n - a_n) \rightarrow 0$.

Alors l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Démonstration. Comme $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, on a

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{et} \quad b_{n+1} \leq b_n$$

Ainsi, (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $b_n - a_n \rightarrow 0$. Ce sont des suites adjacentes, et donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \rightarrow \ell$ et $b_n \rightarrow \ell$.

Comme ce sont des suites adjacentes, on a

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \ell \leq b_n \\ \implies & \forall n \in \mathbb{N} \quad \ell \in I_n \\ \implies & \ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \end{aligned}$$

Ceci montre que $\{\ell\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Réciproquement, montrons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset \{\ell\}$. Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Grâce aux équivalences ci-dessus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq x \leq b_n$$

et passant à la limite, on trouve $\ell \leq x \leq \ell$, donc $x = \ell$. Ainsi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset \{\ell\}$. Finalement

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$$

□

Théorème 13.34 – Théorème de Bolzano–Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration.

□

Exemple 21. La suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède au moins une sous-suite convergente.

5 Suites complexes

5.1 Généralités

Définition 13.35

On appelle suite complexe toute application $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note là encore $u_n := u(n)$.

On peut à nouveau définir la somme et le produit de suites complexes, cf Définition 13.2.

Cependant, comme la relation $\leq$ n'a pas de sens sur $\mathbb{C}$, les notions de suites majorées, minorées, et tout ce qui concerne le sens de variation n'a pas de sens pour les suites complexes. Cependant, la notion de suite bornée à un sens :

Définition 13.36

Une suite complexe (u_n) est dite bornée lorsque la suite de terme général $|u_n|$ est majorée, i.e.

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq K$$

Théorème 13.37

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) est bornée si et seulement si les suites $(\operatorname{Re} u_n)$ et $(\operatorname{Im} u_n)$ sont bornées.

5.2 Limite d'une suite complexe

Pour les suites complexes, on ne définit pas la notion de limite infinie. Il y a donc uniquement les suites convergentes (limite finie) et les autres, qui sont divergentes.

Définition 13.38 – Convergence dans $\mathbb{C}$

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) tend vers ℓ ou converge vers ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

et on écrit $u_n \rightarrow \ell$ ou $\lim u_n = \ell$.

Comparé aux suites réelles, la valeur absolue est donc devenue un module. Beaucoup de résultats s'étendent au cas complexe en modifiant un peu les preuves :

Théorème 13.39

- La limite éventuelle d'une suite complexe est unique.
- Toute suite complexe convergente est bornée.
- Pour tous $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} u_n \rightarrow \ell \\ v_n \rightarrow \ell' \end{cases} \implies \begin{cases} u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell' \\ \lambda u_n \rightarrow \lambda \ell \\ u_n v_n \rightarrow \ell \ell' \\ \frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{\ell} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C} \\ \\ \text{si } \ell \neq 0 \text{ et } u_n \neq 0 \text{ à partir d'un certain rang} \end{array}$$

- Si (u_n) est bornée et $v_n \rightarrow 0$ alors $u_n v_n \rightarrow 0$.

Enfin, on a également cette caractérisation utile pour se ramener au cas réel :

Théorème 13.40

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u_n \rightarrow \ell$
2. $\operatorname{Re} u_n \rightarrow \operatorname{Re} \ell$ et $\operatorname{Im} u_n \rightarrow \operatorname{Im} \ell$

Enfin, le théorème d'encadrement et la notion de suites adjacentes utilisent l'ordre $\leq$ et n'ont donc pas d'équivalent pour les suites complexes.

5.3 Suites extraites (cas complexe)

Toutes les définitions et les théorèmes de la section 4.1 restent valides dans le cas complexe.

Remarque (Sous-sous-suite). Étant donné une suite u (réelle ou complexe) et deux extractrices φ, ψ :

$$(u_{\varphi(n)}) \text{ est une sous-suite de } (u_n)$$

$(u_{\varphi(\psi(n))})$ est une sous-suite de $(u_{\varphi(n)})$ et donc de (u_n)

Par contre, $(u_{\psi(\varphi(n))})$ n'est en général pas une sous-suite de $(u_{\varphi(n)})$:

Exemple 22 (Contre-exemple). Si $u_n = n$, $\varphi(n) = 2n$ et $\psi(n) = n + 1$,

$$u_{\psi(\varphi(n))} = u_{2n+1} = 2n + 1$$

n'est clairement pas une suite extraite de la suite $(u_{\varphi(n)}) = (u_{2n}) = (2n)$, car elles n'ont aucun terme en commun.

Théorème 13.41 – Bolzano-Weierstrass complexe

Toute suite complexe bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée par un réel $K \geq 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n| \leq K$$

Donc la suite *réelle* $(\operatorname{Re} u_n)$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass réel, il existe une sous-suite $(\operatorname{Re} u_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in \mathbb{R}$.

□

6 Suites particulières

6.1 Suites récurrente linéaire d'ordre 1

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe).

Suite arithmétique

Définition : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \in \mathbb{K} \end{cases}$

avec $r \in \mathbb{K}$ la raison de la suite.

Terme général : $u_n = u_0 + nr$

Somme des termes :

$$\sum u_k = \text{nb de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Suite géométrique

Définition : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = qu_n \\ u_0 \in \mathbb{K} \end{cases}$

avec $q \in \mathbb{K}$ la raison de la suite.

Terme général : $u_n = q^n u_0$

Somme des termes :

$$\sum u_k = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Définition 13.42

On dit que (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$$

On obtient une suite arithmétique si et on obtient une suite géométrique si

Méthode – Terme général d'une suite arithmético-géométrique

On cherche le terme général de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = au_n + b \\ u_0 \in \mathbb{K} \end{cases}$ avec $a \neq 1$.

1. On cherche un point fixe, i.e. un $\omega \in \mathbb{K}$ tel que $\omega = a\omega + b$. On trouve $\omega = \frac{b}{1-a}$.

2. On écrit $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases} \implies (u_{n+1} - \omega) = a(u_n - \omega)$

Ainsi, la suite $(u_n - \omega)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

3. En tant que suite géométrique : $u_n - \omega = (u_0 - \omega) \times a^n$, donc

$$u_n = \omega + (u_0 - \omega) \times a^n$$

6.2 Suites récurrente linéaire d'ordre 2

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe).

Définition 13.43 – Suite récurrente linéaire d'ordre 2

u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On définit l'équation caractéristique associée

$$(\text{Car}) : \quad r^2 = ar + b$$

Pour qu'une telle suite soit bien définie, il faut aussi donner les valeurs de $u_0, u_1 \in \mathbb{K}$.

Théorème 13.44 – Résolution, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Si (Car) admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

- Si (Car) admet une racine double $r \in \mathbb{C}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = r^n (A + Bn)$$

Théorème 13.45 – Résolution, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Si (Car) admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

- Si (Car) admet une racine double $r \in \mathbb{R}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = r^n (A + Bn)$$

- Si (Car) n'a pas de racines réelles, les racines complexes sont, sous forme exponentielle, $r = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{r}$. Alors, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

Démonstration. Plus tard, dans un chapitre qui n'a, semble-t-il, aucun rapport... Surprise ! □

Les valeurs u_0, u_1 données permettent de calculer les constantes A, B en regardant les formules pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exemple 23. Calculer le terme général de la suite de Fibonacci (u_n) , définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Étonnant : malgré toutes ces racines carrées, on a $u_n \in \mathbb{N}$!

6.3 Suites récurrentes d'ordre 1, cas général

On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose que $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non trivial. Enfin, on considère $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 13.46 – Suite récurrente d'ordre 1

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre 1 (associée à f) si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Une telle suite (u_n) n'est pas nécessairement bien définie.

Définition 13.47

Soit $J \subset I$. On dit que J est stable par f si $f(J) \subset J$, c-à-d

$$\forall x \in J \quad f(x) \in J$$

Si un tel ensemble J existe, alors pour tout $a \in J$, la suite

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in J$.

Démonstration. Comme $f : J \rightarrow J$ est bien définie, on a par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ fois}}(u_0)$$

est bien défini et appartient à J . □

Théorème 13.48

Soit $f : J \rightarrow J$ une fonction et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Si (u_n) converge vers $\ell \in J$ et f est continue en ℓ , alors

$$f(\ell) = \ell$$

Un réel ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$ est dit un point fixe de f .

Démonstration. Comme $u_n \rightarrow \ell$ et que f est continue en ℓ , alors $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$. De plus $u_{n+1} \rightarrow \ell$. Donc en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on trouve

$$\ell = \lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\ell)$$

□

Méthode – Vous serez parfois guidés !!

On souhaite étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 donné.

1. Étudier f pour dresser son tableau de variations (avec les bornes).
2. Résoudre l'équation $f(\ell) = \ell$. Placer chaque solution dans le tableau.

Info utile : si $u_n \rightarrow \ell$, alors $\ell \in \mathcal{S}$ (ensemble solution de $f(\ell) = \ell$).

3. Identifier un intervalle J , le plus petit possible, tel que

$$u_0 \in J \quad J \text{ est stable par } f \quad f \text{ est monotone sur } J$$

Il faut chercher les bornes de J parmi les valeurs “remarquables” du tableau qui encadrent u_0 .

Info utile : ($u_0 \in J$ et J est stable par f) $\implies \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in J$

4. Si f est décroissante sur J , vous serez guidés... Si f est croissante sur J , alors deux cas possibles :
 - (a) Si $u_1 \geq u_0$, alors comme f est croissante, $u_{n+1} \geq u_n$ par récurrence immédiate. D'où la suite (u_n) est **croissante**.
 - (b) Si $u_1 \leq u_0$, alors comme f est croissante, $u_{n+1} \leq u_n$ par récurrence immédiate. D'où la suite (u_n) est **décroissante**.
5. Faire le bilan de toutes les **infos obtenues** aux étapes 2, 3 et 4, qui permettent de conclure sur la nature de (u_n) ainsi que sa limite.

Exemple 24. Étudier la suite récurrente $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8)$ avec $u_0 = 1$, puis avec $u_0 = 5$.

7 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une suite (u_n) est **monotone**, on peut :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
- si on a une relation explicite $u_n = f(n)$, étudier la monotonie de f .

Méthode

Pour montrer qu'une suite (u_n) **converge**, on peut :

- chercher si elle est croissante majorée, ou décroissante minorée.
- l'encadrer par deux suites convergentes de même limite.
- chercher une autre suite qui lui serait adjacente.
- montrer que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.

Méthode

Pour montrer qu'une suite (u_n) **diverge**, on peut :

- en extraire deux sous-suites qui admettent des limites différentes.
- tenter de la majorer par une suite qui tend vers $-\infty$ ou la minorer par une suite qui tend vers $+\infty$.
- chercher si elle est croissante non majorée, ou décroissante non minorée.
- chercher si elle n'est pas bornée.